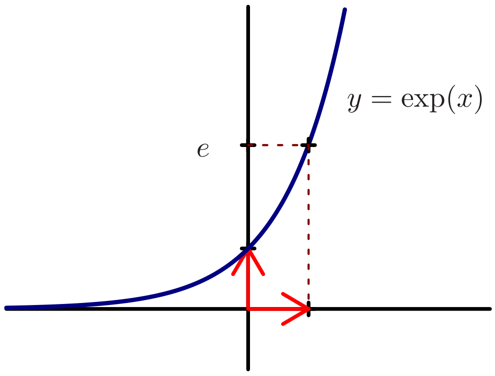
II. Fonctions usuelles

1 Fonctions exponentielles et logarithmes

1.1 Fonctions exponentielle népérienne et logarithme népérien

Définition 1. *On appelle fonction* **exponentielle népérienne** *l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et valant 1 en 0, on la note $x \mapsto \exp(x)$ ou $x \mapsto e^x$ avec $e = \exp(1)$.*



Remarque 1. *L'existence de cette fonction est admise.*

Propriété 1. *La fonction* exp *est dérivable et* $\boxed{\exp' = \exp}$ *, elle est croisssante et strictement positive, de plus* $\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$ *et* $\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$.

Démonstration. Exigible - On utilise la fonction $x \mapsto \exp(x)\exp(-x)$ pour montrer que la fonction exponentielle népérienne ne s'annule pas puis le Théorème des Valeurs intermédiaires pour montrer la positivité stricte par un raisonnement par l'absurde, on montre que $\exp(x) \geqslant x$ pour déterminer les limites. □

Propriété 2. *La fonction exponentielle népérienne vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels x et y et pour tout entier relatif n :*

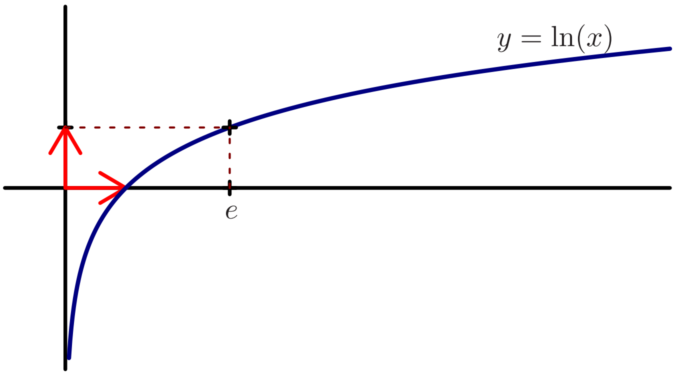
1. $\boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$
2. $\boxed{e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}}$
3. $\boxed{e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}}$
4. $\boxed{e^{nx} = (e^x)^n}$

Démonstration. Exigible - On étudie la fonction $x \mapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)}$. □

Propriété 3. *Si u est une fonction dérivable, alors la fonction e^u est dérivable et* $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$.

Remarque 2. *Cette propriété sera démontrée au moyen du théorème de dérivation d'une fonction composée.*

Définition 2. *On appelle fonction* **logarithme népérien** *la fonction* $\ln : x \mapsto \ln(x)$ *définie sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *par* $\ln(x) = y$ *avec* $e^y = x$.



Remarque 3. *L'existence de cette fonction sera démontrée au moyen du théorème de la bijection.*

Remarque 4. *On a* $\boxed{\ln(1) = 0}$ *et* $\boxed{\ln(e) = 1}$.

Remarque 5. *On a* $\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{R}\ ,\ \ln(e^x) = x}$ *et* $\boxed{\text{Si } x \in]0;+\infty[\ ,\ e^{\ln(x)} = x}$.

Propriété 4. *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et* $\boxed{\text{Si } x \in]0;+\infty[\ ,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$.

Démonstration. Exigible - On admet la dérivabilité. □

Remarque 6. *La fonction* $\ln$ *est donc la primitive sur* $]0;+\infty[$ *de la fonction inverse s'annulant en* 1.

Propriété 5. *La fonction* $\ln$ *est croissante, négative sur* $]0;1]$ *et positive sur* $[1;+\infty[$*, de plus* $\boxed{\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty}$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 6. *La fonction* $\ln$ *vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels* x *et* y *strictement positifs et pour tout entier relatif* n *:*

1. $\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$
2. $\boxed{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$
3. $\boxed{\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$
4. $\boxed{\ln(x^n) = n\ln(x)}$
5. $\boxed{\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)}$

Démonstration. Exigible. □

Propriété 7. *Si* u *est une fonction dérivable et strictement positive, alors la fonction* $\ln(u)$ *est dérivable et* $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$.

Démonstration. Exigible - On admet la dérivabilité. □

1.2 Fonctions puissances

Définition 3. *On appelle* **fonction puissance d'exposant a** $\in \mathbb{R}$, *la fonction notée* $x \mapsto x^a$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $\boxed{x^a = e^{a \ln x}}$.

Remarque 7. *Cette définition généralise l'égalité* $x^n = \left(e^{\ln x}\right)^n = e^{n \ln x}$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1. *Montrer que les fonctions* $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ *et* $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ *sont des fonctions puissances et donner leurs exposants.*

Propriété 8. *La fonction puissance d'exposant* a : $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$, *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et sa dérivée est la fonction* $x \mapsto ax^{a-1}$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 9. *On considère* $a \in \mathbb{R}$, *alors :*

- *Si* $a = 0$, *la fonction puissance d'exposant* a *est constante égale à* 1.
- *Si* $a < 0$, *la fonction puissance d'exposant* a *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de plus* $\lim\limits_{x \to 0} x^a = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = 0$.
- *Si* $a > 0$, *la fonction puissance d'exposant* a *est croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de plus* $\lim\limits_{x \to 0} x^a = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = +\infty$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 8. *La fonction puissance d'exposant* $a > 0$ *admettant une limite finie en* 0, *on peut poser* $0^a = 0$ *pour* $a > 0$.

Exercice 2. *Représenter graphiquement sur une même figure les fonctions puissances d'exposants* 0, -1, 1, 2 *et* $\dfrac{1}{2}$.

Propriété 10. *On considère deux nombres réels* a *et* b *et* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *alors :*

$$\boxed{x^a x^b = x^{a+b}} \qquad \boxed{x^{-a} = \frac{1}{x^a}} \qquad \boxed{\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}} \qquad \boxed{\left(x^a\right)^b = x^{ab}}$$

Démonstration. Exigible. □

1.3 Fonctions exponentielles et logarithmes

Définition 4. *Soit* a *un réel strictement positif, on appelle fonction* **exponentielle de base a** *et on note* $\exp_a$, *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\boxed{\exp_a(x) = e^{x \ln a}}$.

Remarque 9. *On a* $\exp_e = \exp$.

Remarque 10. *Comme* $e^{x \ln a} = a^x$ *pour* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *(cf fonctions puissances), on peut adopter la notation* $\boxed{\exp_a(x) = a^x}$, *attention cependant à ne pas confondre fonction exponentielle (la variable est l'exposant) et fonction puissance (la variable est la base).*

Propriété 11. *On considère deux nombres réels* x *et* y *et* $a \in \mathbb{R}_+^*$, *alors :*

$$\boxed{a^x a^y = a^{x+y}} \qquad \boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x}} \qquad \boxed{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}} \qquad \boxed{\left(a^x\right)^y = a^{xy}}$$

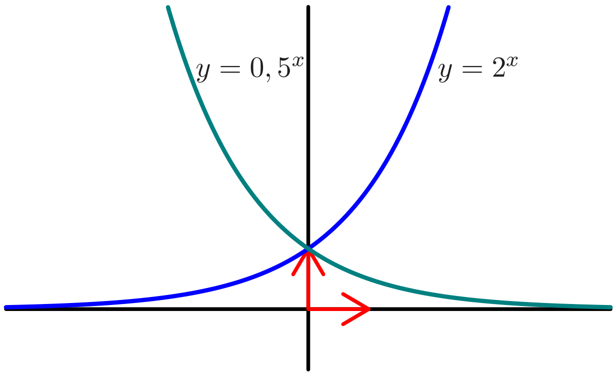
Démonstration. Exigible - Voir la propriété 10. □

Propriété 12. *La fonction exponentielle de base a : $x \mapsto a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto (\ln a)a^x$.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 13. *On considère $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors :*
- *Si $a = 1$, la fonction exponentielle de base a est constante égale à 1.*
- *Si $a < 1$, la fonction exponentielle de base a est décroissante sur $\mathbb{R}$ de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.*
- *Si $a > 1$, la fonction exponentielle de base a est croissante sur $\mathbb{R}$ de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.*

Démonstration. Exigible. □



Exercice 3. *Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^x$.*

Définition 5. *Soit a un réel strictement positif différent de 1, on appelle fonction* **logarithme de base a** *et on note $\log_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par* $\boxed{\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}}$.

Remarque 11. *On a* $\log_e = \ln$.

Propriété 14. *On considère deux nombres réels x et y strictement positifs et a un nombre réel strictement positif différent de 1, alors :*

$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)} \qquad \boxed{\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)} \qquad \boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)}$$

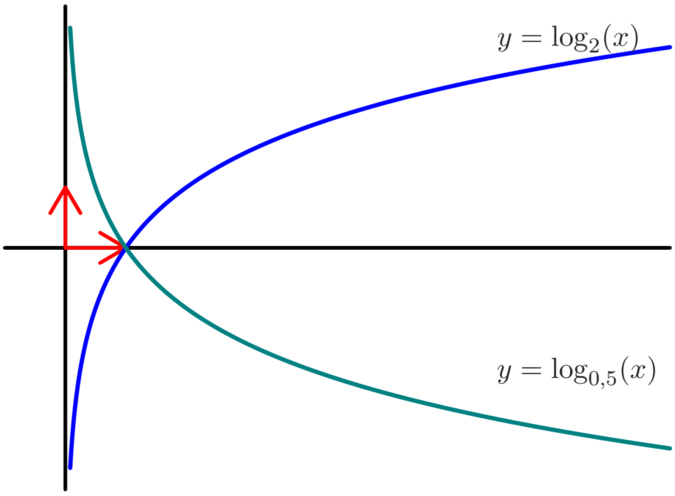
Démonstration. Exigible. □

Propriété 15. *La fonction logarithme de base a : $x \mapsto \log_a(x)$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \neq 1$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln a}$.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 16. *On considère $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \neq 1$, alors :*
- *Si $a < 1$, la fonction logarithme de base a est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ de plus $\lim\limits_{x \to 0} \log_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$.*
- *Si $a > 1$, la fonction logarithme de base a est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ de plus $\lim\limits_{x \to 0} \log_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$.*

Démonstration. Exigible. □



Nous montrons enfin que les fonctions exponentielle de base a et logarithme de base a sont réciproques l'une de l'autre :

Propriété 17. *On considère $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \neq 1$, alors :*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} \exp_a(x) = y \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \log_a(y) = x \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right.}$$

$$\boxed{\textit{Si } x \in \mathbb{R},\ \log_a(\exp_a(x)) = x} \qquad \boxed{\textit{Si } y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp_a(\log_a(y)) = y}$$

Démonstration. Exigible. □

1.4 Croissances comparées

Les propriétés suivantes permettent de lever les cas d'indétermination dans les calculs de limites :

Propriété 18. *On a :*

- $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$ *et* $\boxed{\textit{Si } a \in \mathbb{R}_+^* \textit{ et } b \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0}$
- $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0}$ *et* $\boxed{\textit{Si } a \in \mathbb{R}_+^* \textit{ et } b \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(e^x)^b} = 0}$

Démonstration. Exigible - On montre que $\ln x \leqslant \sqrt{x}$ et $e^x \geqslant \frac{x^2}{2}$ pour $x > 0$. □

Exercice 4. *Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2^x}$.*

Propriété 19. *On a :*

- $\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0}$ *et* $\boxed{\textit{Si } a \in \mathbb{R}_+^* \textit{ et } b \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^a|\ln x|^b = 0}$
- $\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}$ *et* $\boxed{\textit{Si } a \in \mathbb{R}_+^* \textit{ et } b \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \lim_{x\to-\infty} |x|^a(e^x)^b = 0}$

Démonstration. Exigible - On utilise la propriété 18. □

Exercice 5. *Étudier la limite en 0 de la fonction $x \mapsto x^{\sqrt{x}\ln x}$.*

1.5 Fonctions hyperboliques

Définition 6. *On appelle fonctions* **cosinus hyperbolique** *et* **sinus hyperbolique** *et on note respectivement* ch *et* sh, *les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $\boxed{\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}$ *et* $\boxed{\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}$.

Propriété 20. *Les fonctions* ch *et* sh *sont respectivement paire et impaire.*

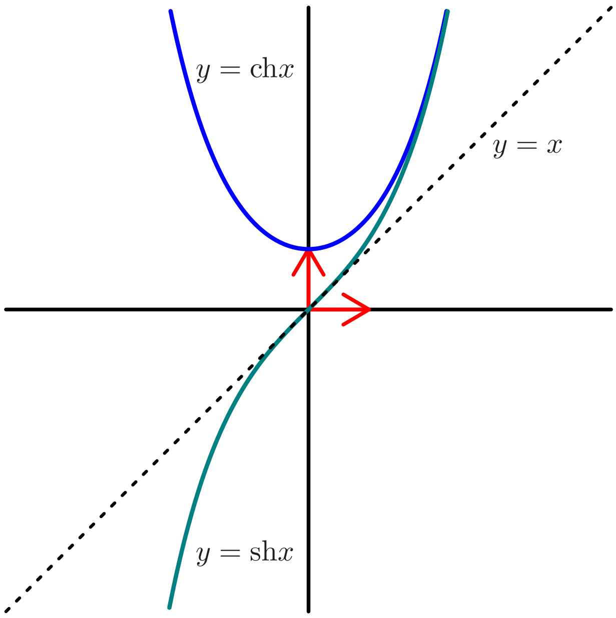
Démonstration. Exigible. □

Propriété 21. *Les fonctions* ch *et* sh *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)}$, $\boxed{\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)}$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 22. *La fonction* sh *est croissante sur* $\mathbb{R}$, *de plus* $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \text{sh}(x) = -\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \text{sh}(x) = +\infty}$.
La fonction ch *est décroissante sur* $\mathbb{R}_-$ *et croissante sur* $\mathbb{R}_+$, *de plus* $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \text{ch}(x) = +\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \text{ch}(x) = +\infty}$.

Démonstration. Exigible. □



Propriété 23. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\boxed{\text{ch}x + \text{sh}x = e^x} \qquad \boxed{(\text{ch}x)^2 - (\text{sh}x)^2 = 1}$$

Démonstration. Exigible. □

Définition 7. *On appelle fonction* **tangente hyperbolique** *et on note* th, *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\boxed{\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}x}}$.

Propriété 24. *La fonction* th *est impaire.*

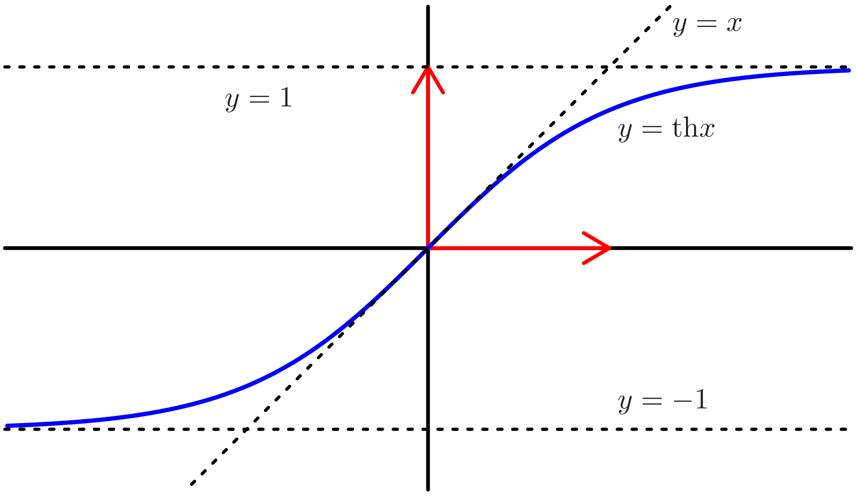
Démonstration. Exigible. □

Propriété 25. *La fonction* th *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\text{th}'(x) = \dfrac{1}{(\text{ch}x)^2} = 1 - (\text{th}x)^2}$

Démonstration. Exigible. □

Propriété 26. *La fonction* th *est croissante sur* $\mathbb{R}$*, de plus* $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1}$.

Démonstration. Exigible. □



Propriété 27. *Si u est une fonction dérivable, alors les fonctions* ch$u$, sh$u$ *et* th$u$ *sont dérivables et :*

$$\boxed{(\text{ch}u)' = u'\text{sh}u} \qquad \boxed{(\text{sh}u)' = u'\text{ch}u} \qquad \boxed{(\text{th}u)' = \frac{u'}{(\text{ch}u)^2}}$$

Démonstration. Exigible - On uilise la propriété de dérivation de e^u. □

1.6 Fonctions hyperboliques réciproques

Définition 8. *On appelle fonction* **argument sinus hyperbolique** *et on note* argsh*, la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\boxed{\begin{cases} \text{argsh}(x) = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \text{sh}y = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

Remarque 12. *L'existence de cette fonction sera démontrée au moyen du théorème de la bijection.*

Remarque 13. *On a* $\boxed{\textit{Si } x \in \mathbb{R}\ ,\ \text{sh}(\text{argsh}x) = x}$ *et* $\boxed{\textit{Si } y \in \mathbb{R}\ ,\ \text{argsh}(\text{sh}y) = y}$.

Remarque 14. *La fonction* argsh *est impaire.*

Exercice 6. *Calculer* argsh(2).

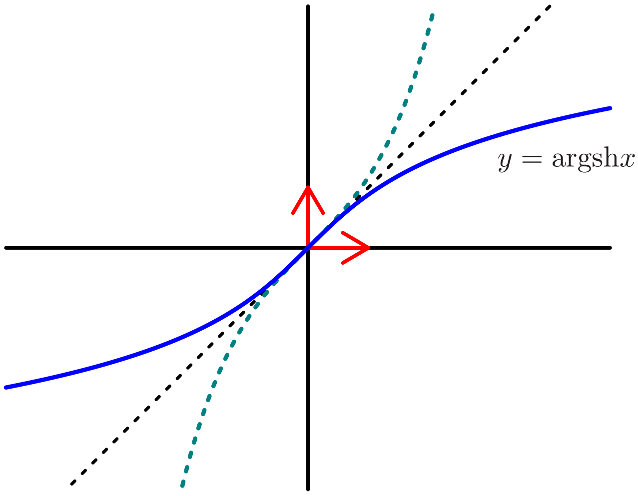
Exercice 7. *Démontrer que* $\boxed{\textit{Si } x \in \mathbb{R}\ ,\ \text{ch}(\text{argsh}x) = \sqrt{x^2+1}}$.

Propriété 28. *La fonction* argsh *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

Démonstration. Exigible - On admet la dérivabilité. □

Propriété 29. *La fonction* argsh *est croissante sur* $\mathbb{R}$*, de plus* $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \text{argsh}(x) = -\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \text{argsh}(x) = +\infty}$.

Démonstration. Exigible. □



Propriété 30. *Si u est une fonction dérivable, alors la fonction* $\mathrm{argsh}u$ *est dérivable et* $\boxed{(\mathrm{argsh}u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}}$.

Remarque 15. *Cette propriété sera démontrée au moyen du théorème de dérivation d'une fonction composée.*

Définition 9. *On appelle fonction* **argument cosinus hyperbolique** *et on note* argch*, la fonction de* $[1;+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par :*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \mathrm{argch}(x) = y \\ x \in [1;+\infty[\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \mathrm{ch}y = x \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{array}\right.}$$

Remarque 16. *L'existence de cette fonction sera démontrée au moyen du théorème de la bijection.*

Remarque 17. *On a* $\boxed{\text{Si } x \in [1;+\infty[\ ,\ \mathrm{ch}(\mathrm{argch}x) = x}$ *et* $\boxed{\text{Si } y \in \mathrm{R}_+\ ,\ \mathrm{argch}(\mathrm{ch}y) = y}$.

Exercice 8. *Simplifier* $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}y)$ *pour* $y \in \mathrm{R}_-$*, en déduire une simplification de* $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}y)$ *pour* $y \in \mathrm{R}$.

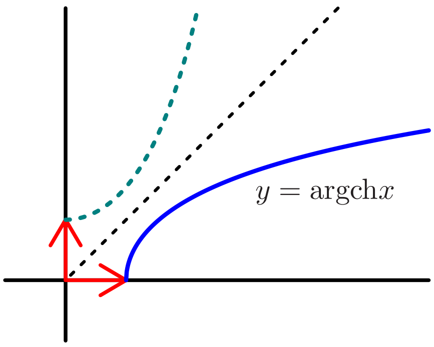
Exercice 9. *Démontrer que* $\boxed{\text{Si } x \in [1;+\infty[\ ,\ \mathrm{sh}(\mathrm{argch}x) = \sqrt{x^2-1}}$.

Propriété 31. *La fonction* argch *est dérivable sur* $]1;+\infty[$ *et* $\boxed{\text{Si } x \in]1;+\infty[\ ,\ \mathrm{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$.

Démonstration. Exigible - On admet la dérivabilité. □

Propriété 32. *La fonction* argch *est croissante sur* $]1;+\infty[$*, de plus* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{argch}(x) = +\infty}$.

Démonstration. Exigible. □



Propriété 33. *Si u est une fonction dérivable à valeurs dans* $]1;+\infty[$*, alors la fonction* $\mathrm{argch}u$ *est dérivable et* $\boxed{(\mathrm{argch}u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}}$.

Remarque 18. *Cette propriété sera démontrée au moyen du théorème de dérivation d'une fonction composée.*

Définition 10. *On appelle fonction* **argument tangente hyperbolique** *et on note* argth*, la fonction de* $]-1;1[$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}\operatorname{argth}(x)=y\\ x\in]-1;1[\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\operatorname{th}y=x\\ y\in\mathbb{R}\end{array}\right.}$$

Remarque 19. *L'existence de cette fonction sera démontrée au moyen du théorème de la bijection.*

Remarque 20. *On a* $\boxed{\text{Si } x\in]-1;1[\ ,\ \operatorname{th}(\operatorname{argth}x)=x}$ *et* $\boxed{\text{Si } y\in\mathbb{R}\ ,\ \operatorname{argth}(\operatorname{th}y)=y}$.

Remarque 21. *La fonction* argth *est impaire.*

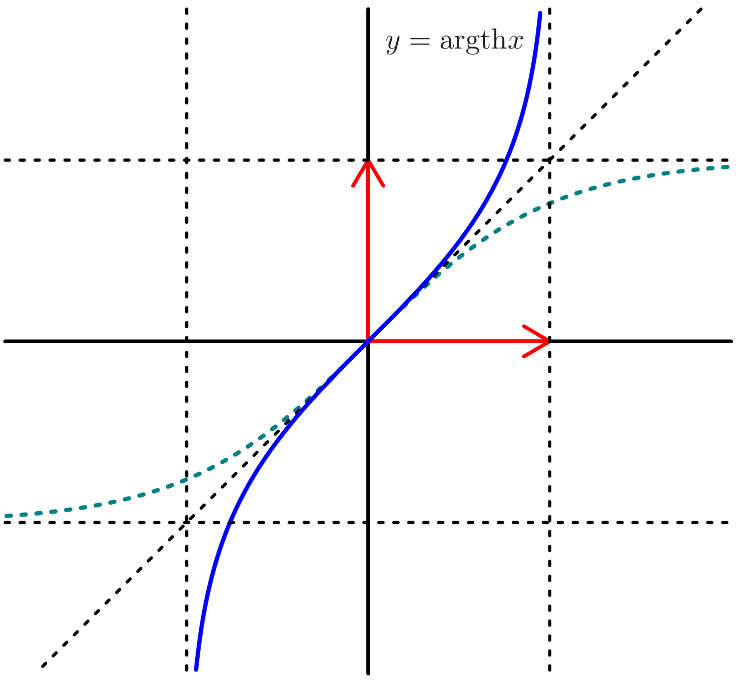
Exercice 10. *Calculer* $\operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Propriété 34. *La fonction* argth *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et* $\boxed{\text{Si } x\in]1;1[\ ,\ \operatorname{argth}'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}}$.

Démonstration. Exigible - On admet la dérivabilité. □

Propriété 35. *La fonction* argth *est croissante sur* $]-1;1[$*, de plus* $\boxed{\lim\limits_{x\to-1}\operatorname{argth}(x)=-\infty}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\operatorname{argth}(x)=+\infty}$.

Démonstration. Exigible. □

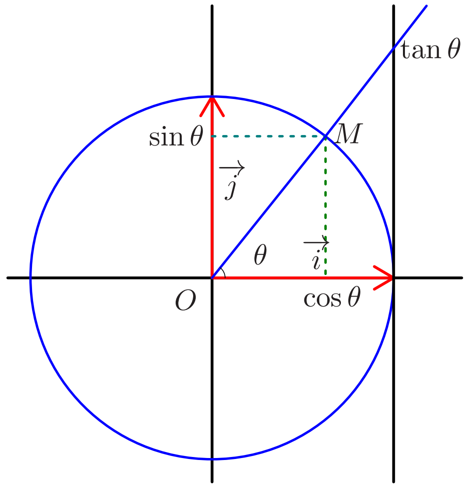


Propriété 36. *Si* u *est une fonction dérivable à valeurs dans* $]-1;1[$*, alors la fonction* $\operatorname{argth}u$ *est dérivable et* $\boxed{(\operatorname{argth}u)'=\dfrac{u'}{1-u^2}}$.

Remarque 22. *Cette propriété sera démontrée au moyen du théorème de dérivation d'une fonction composée.*

2 Fonction exponentielle complexe

2.1 Fonctions circulaires



Définition 11. *Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct* $(O, \vec{i}, \vec{j})$*, on considère un point* M *du cercle de centre* O *et de rayon 1 et on note* $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$*. La fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $[-1;1]$ *qui à* θ *associe l'abscisse du point* M *est appelée fonction* **cosinus** *et est notée* cos *et la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $[-1;1]$ *qui à* θ *associe l'ordonnée du point* M *est appelée fonction* **sinus** *et est notée* sin*. On appelle fonction* **tangente** *et on note* tan *la fonction définie sur* $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ *par* $\boxed{\tan(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}}$.

Remarque 23. *Les fonctions cosinus et sinus sont* 2π*-périodiques et respectivement paire et impaire. La fonction tangente est impaire et* π*-périodique.*

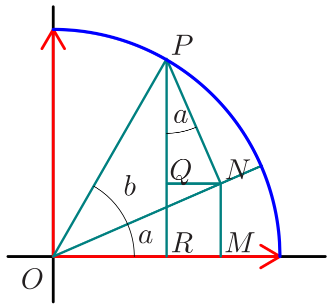
Propriété 37. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$*, on a* $\boxed{(\cos x)^2+(\sin x)^2=1}$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 38. *Soient* a *et* b *des nombres réels, alors :*

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b} \qquad \boxed{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b}$$

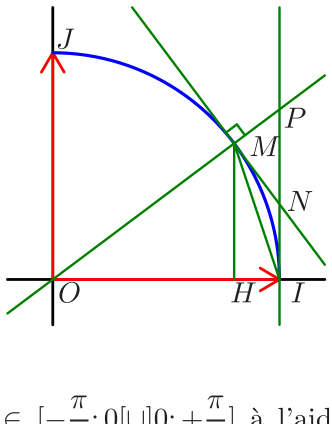
Démonstration. Exigible - Exprimer sur la figure ci-contre les longueurs ON et PN en fonction de $\cos b$ et $\sin b$. En déduire les longueurs OM, QN puis OR ainsi que les longueurs PQ, MN et PR.



□

Propriété 39. *On a* $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ *pour* $x\in[0;\frac{\pi}{2}[$

Démonstration. Exigible - On utilise sur la figure ci-contre l'encadrement $MI \leqslant l(\overset{\frown}{MI}) \leqslant MN+NI$.



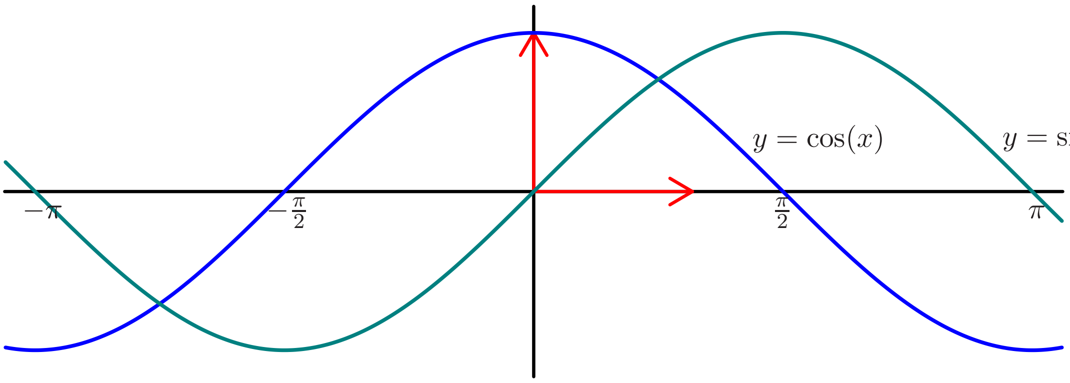
□

Propriété 40. *On a* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}}$.

Démonstration. Exigible - On montre que $\cos x \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$ pour $x\in[-\frac{\pi}{2};0[\cup]0;+\frac{\pi}{2}]$ à l'aide de la propriété 39 puis on utilise la formule $\cos x = 1-2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2$. □

Propriété 41. *Les fonctions* cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$, $\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$.

Démonstration. Exigible - On étudie la limite pour h tendant vers 0 du taux d'accroissement $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. □



Propriété 42. *Si* u *est une fonction dérivable, alors les fonctions* $\cos u$ *et* $\sin u$ *sont dérivables et :*

$$\boxed{(\cos u)' = -u' \sin u} \qquad \boxed{(\sin u)' = u' \cos u}$$

Remarque 24. *Cette propriété sera démontrée au moyen du théorème de dérivation d'une fonction composée.*

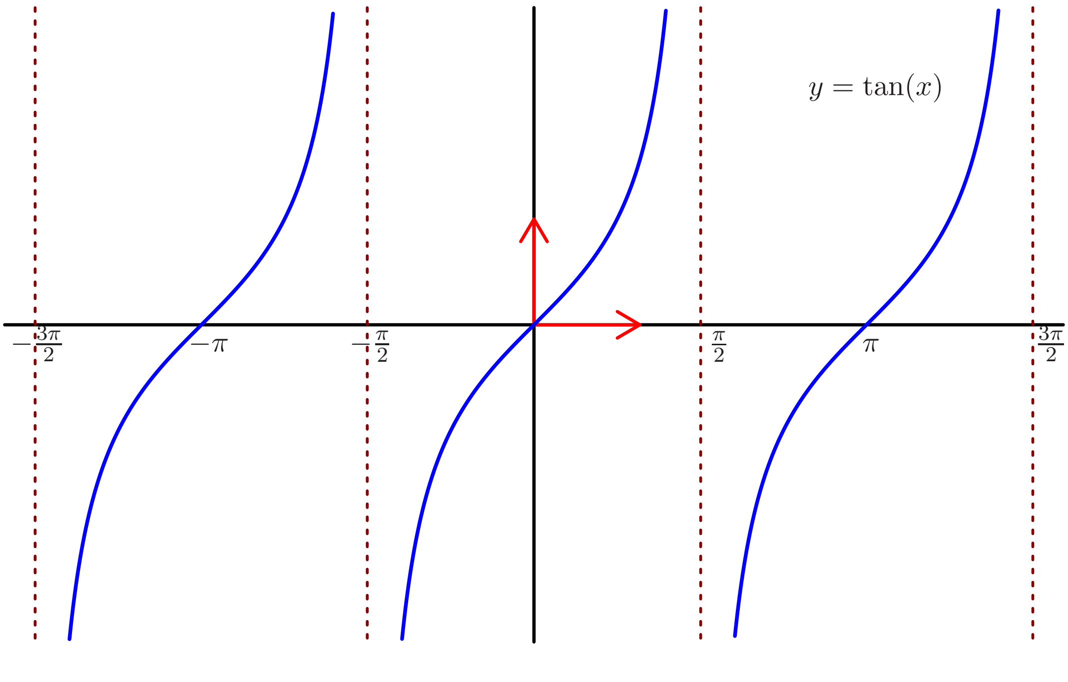
Exercice 11. *Déterminer les variations de la fonction* $x \mapsto \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ *sur l'intervalle* $[0;\pi]$.

Propriété 43. *La fonction* tan *est dérivable sur chacun des intervalles* $\left]\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$ *,* $k \in \mathbb{Z}$ *et*

$$\boxed{\text{Si } x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z} \quad,\quad \tan'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2}.$$

Démonstration. Exigible. □

Remarque 25. *La fonction* tan *est donc croissante sur chacun des intervalles* $\left]\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$ *,* $k \in \mathbb{Z}$.



2.2 Fonctions circulaires réciproques

Définition 12. *On appelle fonction* **arc sinus** *et on note* arcsin*, la fonction de* $[-1;1]$ *dans* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *définie par :*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\arcsin(x)=y\\ x\in[-1;1]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c}\sin y=x\\ y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right.}$$

Remarque 26. *L'existence de cette fonction sera démontrée au moyen du théorème de la bijection.*

Remarque 27. *On a* $\boxed{\textit{Si } x\in[-1;1]\ ,\ \sin(\arcsin x)=x}$ *et* $\boxed{\textit{Si } y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ \arcsin(\sin y)=y}$.

Remarque 28. *La fonction* arcsin *est impaire.*

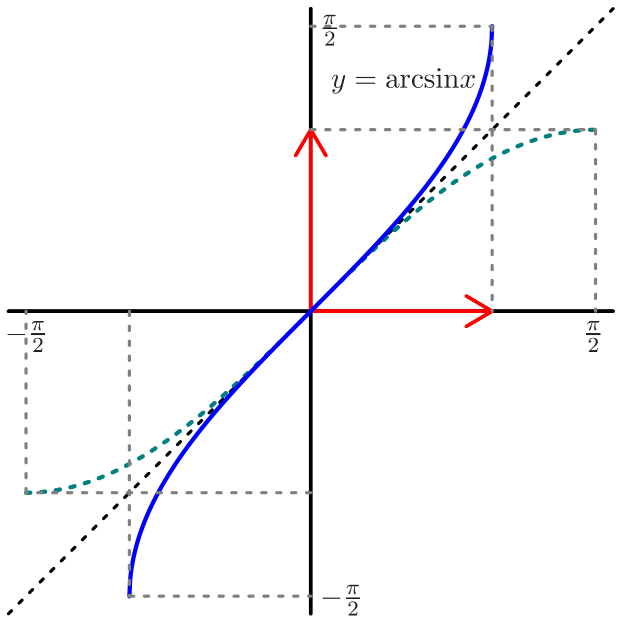
Exercice 12. *Calculer* $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$.

Exercice 13. *Démontrer que* $\boxed{\textit{Si } x\in[-1;1]\ ,\ \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}}$.

Propriété 44. *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et* $\boxed{\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

Démonstration. Exigible - On admet la dérivabilité. ☐

Remarque 29. *La fonction* arcsin *est donc croissante sur* $[-1;1]$.



Propriété 45. *Si* u *est une fonction dérivable à valeurs dans* $]-1;1[$*, alors la fonction* $\arcsin u$ *est dérivable et* $\boxed{(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$.

Remarque 30. *Cette propriété sera démontrée au moyen du théorème de dérivation d'une fonction composée.*

Définition 13. *On appelle fonction* **arc cosinus** *et on note* arccos*, la fonction de* $[-1;1]$ *dans* $[0;\pi]$ *définie par :*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\arccos(x)=y\\ x\in[-1;1]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c}\cos y=x\\ y\in[0;\pi]\end{array}\right.}$$

Remarque 31. *L'existence de cette fonction sera démontrée au moyen du théorème de la bijection.*

Remarque 32. *On a* $\boxed{\text{Si } x\in[-1;1]\ ,\ \cos(\arccos x)=x}$ *et* $\boxed{\text{Si } y\in[0;\pi]\ ,\ \arccos(\cos y)=y}$.

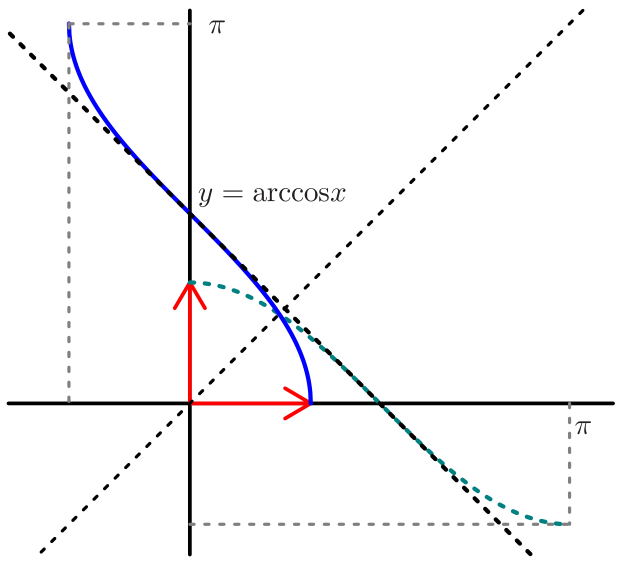
Exercice 14. *Calculer* $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $\arccos\left(\cos\dfrac{7\pi}{5}\right)$.

Exercice 15. *Démontrer que* $\boxed{\text{Si } x\in[-1;1]\ ,\ \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}}$.

Propriété 46. *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et* $\boxed{\arccos'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

Démonstration. Exigible. □

Remarque 33. *La fonction* arccos *est donc décroissante sur* $[-1;1]$.



Propriété 47. *Si* u *est une fonction dérivable à valeurs dans* $]-1;1[$*, alors la fonction* $\arccos u$ *est dérivable et* $\boxed{(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$.

Remarque 34. *Cette propriété sera démontrée au moyen du théorème de dérivation d'une fonction composée.*

Définition 14. *On appelle fonction* **arc tangente** *et on note* arctan*, la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ *définie par :*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\arctan(x)=y\\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c}\tan y=x\\ y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{array}\right.}$$

Remarque 35. *L'existence de cette fonction sera démontrée au moyen du théorème de la bijection.*

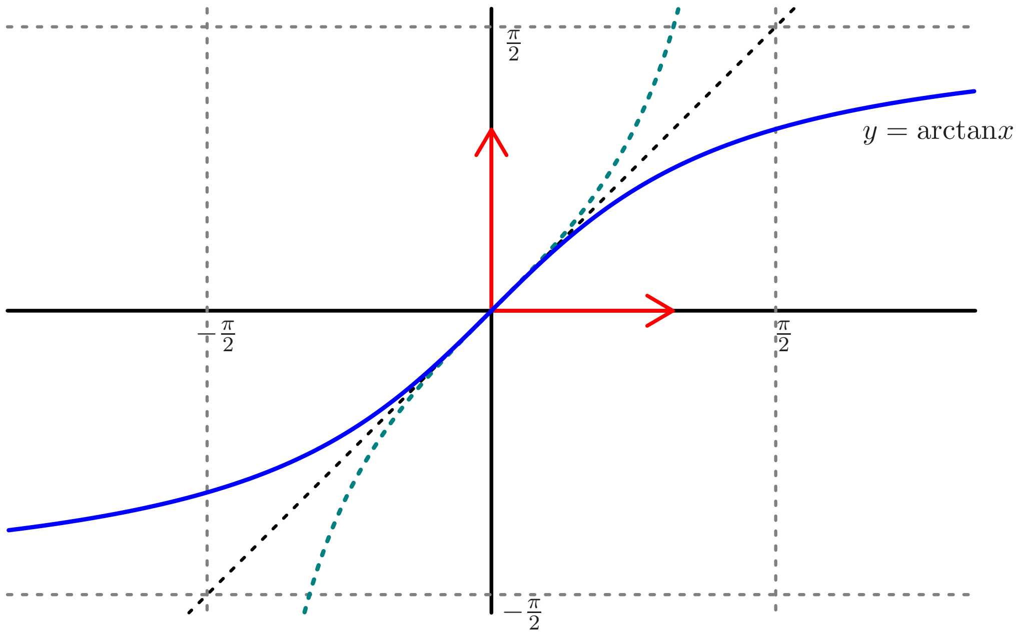
Remarque 36. *On a* $\boxed{\text{Si } x\in\mathbb{R}\ ,\ \tan(\arctan x)=x}$ *et* $\boxed{\text{Si } y\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\ ,\ \arctan(\tan y)=y}$.

Exercice 16. *Calculer* $\arctan(\sqrt{3})$ *et* $\arctan\left(\tan\dfrac{7\pi}{5}\right)$.

Propriété 48. *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

Démonstration. Exigible. □

Remarque 37. *La fonction* arctan *est donc croissante sur* $\mathbb{R}$.



Propriété 49. *Si* u *est une fonction dérivable, alors la fonction* $\arctan u$ *est dérivable et* $\boxed{(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}}$.

Remarque 38. *Cette propriété sera démontrée au moyen du théorème de dérivation d'une fonction composée.*

2.3 Fonction exponentielle complexe

Nous commencons par définir la dérivation de fonctions à valeurs complexes :

Définition 15. *On considère une fonction à valeurs complexes* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(t) \end{array}\right.$ *et on appelle* x *et* y *les fonctions à valeurs réelles réelles qui à* t *associent respectivement les parties réelle et imaginaire de* $f(t)$ *soit* $f(t) = x(t) + iy(t)$. *Si les fonctions* x *et* y *sont dérivables alors on dit que la fonction à valeurs complexes* f *est dérivable et on définit sa dérivée* f' *par* $f'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Exercice 17. *Montrer que la fonction à valeurs complexes* $t \mapsto (2i+1)t^2 - (1+2i)t$ *est dérivable et calculer sa dérivée.*

Propriété 50. *Soit* $a \in \mathbb{C}$, *la fonction à valeurs complexes* $t \mapsto e^{at}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* $t \mapsto ae^{at}$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 18. *En dérivant la fonction* $t \mapsto e^{it}$, *retrouver les dérivées des fonctions cosinus et sinus.*

Propriété 51. *Si* u *est une fonction à valeurs complexes dérivable, alors la fonction* e^u *est dérivable et* $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$.

Démonstration. Exigible. □